Verzögerungsglied 2. Ordnung

Meßgeräte mit zwei gekoppelten Energiespeichern lassen sich durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung beschreiben.

Kenngrößen: **Dämpfungsfaktor D (dimensionslos)**
Zeitkonstante T ($f_g = 1/2\pi T$)

Differentialgleichung 2. Ordnung in der einfachsten Form:

$$a_0 u_a + a_1 \dot{u}_a + a_2 \ddot{u}_a = e_0 u_e$$

$$u_a + \frac{a_1}{a_0} \dot{u}_a + \frac{a_2}{a_0} \ddot{u}_a = \frac{e_0}{a_0} u_e$$

mit: u_e **= Eingangsspannung**
u_a **= Ausgangsspannung**
a_0, a_1, a_2, e_0 **= Konstanten**

Beharrungszustand:

$$\dot{u}_a = 0,\ \ddot{u}_a = 0$$

damit:

$$u_a = \frac{e_0}{a_0} u_e$$

Also wiederum:

Quotient e_0/a_0 entspricht dem vorher definierten Übertragungsfaktor k bzw. der statischen Empfindlichkeit E:

$$\frac{e_0}{a_0} = k = E$$

cont.

Koeffizient: $\frac{a_2}{a_0}$ **(Einheit [s²])**

$$\frac{a_2}{a_0} = T^2 = \frac{1}{\omega_g^{\;2}} = \frac{1}{\omega_0^{\;2}}$$ **Grenzfrequenz ω_g**

Koeffizient: $\frac{a_1}{a_0}$ **(Einheit [s])**

Definition: $\frac{a_1}{a_0} = 2DT$

Damit: $u_a + 2DT \cdot \dot{u}_a + T^2 \cdot \ddot{u}_a = k \cdot u_e$

Gesucht: **Eine partikuläre Lösung,**
Die homogene Lösung.

<u>**Partikuläre Lösung:**</u> $\rightarrow$ **stationärer Fall**

$$u_{a,p} = k \cdot u_e$$

<u>**Homogene DGL:**</u>

$$u_a + 2DT \cdot \dot{u}_a + T^2 \cdot \ddot{u}_a = 0$$

Verzögerungsglied 2. Ordnung

cont.

Lösungsansatz:

$$u_{a,h} = e^{r\,t}$$

→ **charakteristische Gleichung:**

$$1 + 2DTr + T^2 \cdot r^2 = 0$$

Die Wurzeln $r_{1,2}$ dieser Gleichung werden als Eigenwerte bezeichnet:

$$\boxed{r_{1,2} = -\frac{D}{T} \pm \frac{1}{T}\sqrt{D^2 - 1}}$$

Fallunterscheidung:

a) D < 1:
Die beiden Wurzeln r_1 und r_2 bilden ein konjugiert komplexes Zahlenpaar.

b) D > 1:
Die beiden Wurzeln r_1 und r_2 sind reelle Zahlen.

c) D = 1:
Die Wurzeln haben einen einzigen reellen Wert $r_1 = r_2$.

Verzögerungsglied 2. Ordnung

cont.

Lösungen:

D < 1:

$$\boxed{u_a = k \cdot u_e \left[1 - e^{-\frac{D t}{T}} \cdot (\cos \omega_D t + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \sin \omega_D t) \right]}$$

mit:

$$\omega_D = \frac{1}{T}\sqrt{1-D^2} = \omega_g \sqrt{1-D^2}$$

Sonderfall: D = 0:

$$\boxed{u_a = k \cdot u_e (1 - \cos \omega_g t)}$$

<u>Ungedämpfte Schwingung</u>

D > 1:

$$\boxed{u_a = k\, u_e \cdot (1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}})}$$

mit:

$$T_1 + T_2 = 2DT$$
$$T_1 \cdot T_2 = T^2$$

D = 1:

$$\boxed{u_a = k\, u_e \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}}) = k\, u_e \cdot (1 - \frac{T+t}{T} e^{-\frac{t}{T}})}$$

<u>Aperiodischer Grenzfall</u>